UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DEL MOLISE
FACOLTÀ DI ECONOMIA
CAMPOBASSO
PRESIDENTE Chiar.mo Prof. Ennio BADOLATI

CORSO DI LAUREA
STATISTICA E INFORMATICA PER LE AZIENDE
INDIRIZZO INFORMATICO-GESTIONALE
PRESIDENTE Chiar.mo Prof. Claudio LUPI

Prova Finale

I Processi dei Rinnovi in Teoria del Rischio.

RELATORE
Chiar.mo Professore
Ennio BADOLATI

CANDIDATO
Eugenio KNIAHYNICKI
Matr. n° 122640

ANNO ACCADEMICO 2006/2007

SOMMARIO

INTRODUZIONE 4

CAPITOLO 1

INTRODUZIONE AI PROCESSI DEI RINNOVI

1.1 Origini dei processi dei rinnovi 6

1.2 Il processo di conteggio 6

1.3 Richiami sui processi (ordinari) dei rinnovi 8

1.4 Teoremi dei rinnovi 11

1.5 La trasformata (e l'antitrasformata) di Laplace 12

CAPITOLO 2

I PROCESSI DEI RINNOVI IN TEORIA DEL RISCHIO

2.1 Teoria Collettiva del Rischio 18

2.2 La diseguaglianza di Lundberg 21

2.3 Processi dei rinnovi e teoria della rovina 23

CAPITOLO 3

PROBABILITÀ ASINTOTICA DI NON ROVINA

3.1 Premessa 27

3.2 L'equazione di Dickson 27

3.2.1 Applicazioni della trasformata di Laplace all'equazione di Dickson nel caso in cui la funzione di ripartizione delle somme a rischio sia del tipo esponenziale negativa 30

CAPITOLO 4

TALUNE VALUTAZIONI NUMERICHE

4.1 Approssimazioni della disuguaglianza di Lundberg 35

4.1.1 Somme a rischio di tipo esponenziale negativa 36

4.1.2 Somme a rischio di tipo Erlang (2) 38

4.2 Approssimazioni dell'equazione di Dickson **41**

4.2.1 Somme a rischio di tipo esponenziale negativa **42**

4.3 La costante di Sparre-Andersen **44**

CONCLUSIONI **46**

BIBLIOGRAFIA

INTRODUZIONE

Nel 1998 Dickson ha proposto una nuova equazione integro-differenziale per il calcolo della funzione asintotica di non rovina, nel caso in cui la sequenza stocastica dei sinistri fosse regolata da un processo ordinario dei rinnovi. In realtà, nel 1957, E. Sparre Andersen aveva introdotto un nuovo procedimento di conteggio dei sinistri generalizzando la precedente teoria di Poisson, ma il suo metodo, sfortunatamente, non aveva quella caratteristica di facile applicabilità necessaria, invece, agli usi attuariali. E' indiscutibile, perciò, che l'innovazione proposta da Dickson è uno strumento concretamente utilizzabile nella pratica attuariale.

L'argomento, tuttavia, non ha ancora raggiunto una sistemazione definitiva per cui si ritiene che non mancheranno ulteriori sviluppi, principalmente sugli aspetti analitici.

In questo lavoro, ipotizzando che il processo aleatorio dei sinistri sia regolato da una distribuzione di tipo erlangiano di ordine due, si cercherà di esplicitare la funzione di non rovina nel caso classico e nel caso dei rinnovi, considerando per entrambi i casi che la funzione di ripartizione delle somme a rischio sia del tipo esponenziale.

Successivamente, risolveremo, con il metodo della trasformata di Laplace, sia la disuguaglianza di Lundberg che l'equazione di Dickson nelle ipotesi prese in considerazione.

CAPITOLO 1

INTRODUZIONE AI PROCESSI DEI RINNOVI

1.1 Origini dei processi dei rinnovi

La nascita della teoria dei rinnovi si può far risalire ad una serie di memorie redatte negli anni ’40 e ’50 da illustri studiosi quali Lotka, Blackwell, Feller e Smith, le cui applicazioni alla teoria della rovina sono riferibili ad una memoria del matematico danese Erik Sparre Andersen del 1957 e ad alcuni articoli di Takács, Segerdahl, von Bahr e Thorin.

1.2 Il processo di conteggio

Un processo stocastico $N(t),\ t>0$ è detto processo di conteggio (counting process) se $N(t)$ rappresenta il numero totale di eventi che accadono fino all'istante t. Si tratta di una speciale classe di processi stocastici, a tempo continuo e stati (possibili valori) discreti.

Un processo di conteggio $N(t)$ rispetta le seguenti proprietà:

- $N(t)$ ha incrementi indipendenti stazionari;
- $N(0)=0$;
- per $h \to 0$ risulta $\text{Prob}\big(N(h)=1\big)=\lambda h+o(h)$, dove $o(h)$, simbolo dovuto a Landau, indica $\lim_{h\to 0}\frac{o(h)}{h}=0$;
- $\text{Prob}\big(N(h)\geq 2\big)=o(h)$, ovvero la probabilità di avere più di un sinistro è trascurabile.

Definizione. Un processo di conteggio ammette incrementi indipendenti se per ogni $t\geq 0$, $h>0$, le variabili aleatorie $N(t+h)-N(t)$ e $N(t)$ sono tra loro indipendenti; un processo di conteggio ammette incrementi stazionari se per ogni $h>0$ fissato e per ogni $t,s\geq 0$ le variabili aleatorie $N(t+h)-N(t)$ e $N(s+h)-N(s)$ hanno la stessa distribuzione.

Uno dei più importanti processi di conteggio è il processo di Poisson, la sua importanza è dovuta al gran numero di fenomeni fisici che possono essere descritti (almeno in prima approssimazione) da tale processo.

Definizione. Il processo $N(t),\ t>0$ ***è detto essere un processo di Poisson con intensità (tasso, rate)*** λ ***se***

- $N(0)=0$***;***
- ***il processo ha incrementi indipendenti;***
- ***per ogni*** $t>0$***, per ogni*** $h>0$***, la variabile aleatoria*** $N(t+h)-N(t)$ ***ha distribuzione di Poisson di parametro*** λh***.***

1.3 Richiami sui processi (ordinari) dei rinnovi

Un processo ordinario dei rinnovi è un processo di conteggio. Sia $N(t)=\max\{n: S_n \le t\}$ dove

$$\begin{aligned} S_0 &= 0 \\ S_1 &= T_1 \\ S_2 &= T_1 + T_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ S_n &= T_1 + T_2 + \ldots + T_n \end{aligned}$$

in cui le $N(t)=\max\{n: S_n \le t\}$ rappresentano i tempi di arrivo (o di ricambio) con funzioni di ripartizione

$$F_0 = 1$$
$$F_1(x) = \text{Prob}(T_1 \le x) = F(x)$$
$$F_2(x) = \text{Prob}(T_1 + T_2 \le x) = \int_0^x F(x-s)\,dF(s)$$
....
$$F_k(x) = \text{Prob}(T_1 + T_2 + \ldots + T_n \le x) = \int_0^x F_{k-1}(x-s)\,dF(s)$$

le T_i sono variabili casuali indipendenti tra loro, positive e identicamente distribuite con funzione di ripartizione

$$F(x) = \text{Prob}(T_i \le x) \qquad \left(x \in \mathbb{R}_0^+\right)$$

e rappresentano i tempi intercorrenti tra gli eventi mentre $N(t)$ indica il numero di rinnovi (o di arrivi) in un intervallo di tempo $[0,t]$.

Ponendo

$$\mu = E(T_i)$$

e ricordando che $E(T_i)$ indica il valor medio della variabile casuale T_i, si può dimostrare che se $\mu > 0$, allora in ogni intervallo $[0,t]$ il numero di rinnovi è finito.

Inoltre, sussiste la relazione

$$P\left(N(t) = k\right) = \text{Prob}\left(N(t) \ge k\right) - \text{Prob}\left(N(t) \ge k+1\right) = F_k(t) - F_{k+1}(t)$$

con la quale si può dimostrare la formula della funzione dei rinnovi

$$M(t) = E\left(N(t)\right) = \sum_1^\infty {}_k k\text{Prob}\left(N(t) = k\right) = \sum_1^\infty {}_k k\left(F_k(t) - F_{k+1}(t)\right) = \sum_1^\infty {}_k F_k(t)$$

che esprime il valor medio di $N(t)$, ovvero il numero medio di rinnovi in $[0,t]$.

Da quest'ultima formula è possibile provare che $M(t)$ verifica l'equazione integrale dei rinnovi

$$M(t) = F(t) + \int_0^x M(t-s)\,dF(s)$$

in quanto, denotando con * il prodotto di convoluzione,

$$M(t) = F(t) + \int_0^x {}_k F_k(t) * dF = F(t) + M(t) * dF$$

Occorre aggiungere che, in letteratura, viene considerata, con maggiore generalità, come equazione (integrale) dei rinnovi, l'equazione

$$u(t) = f(t) + \int_0^t u(t-s)\varphi(s)\,ds$$

nella quale $u(t)$ è la funzione incognita.

Ricordiamo cosa si intende per convoluzione.

Definizione. Si considerino due funzioni continue ed integrabili nel senso di Riemann $f(t):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ***e*** $g(t):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$***. Si definisce convoluzione di f e g la funzione definita nel seguente modo***

$$f(t) * g(t) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau)\,g(\tau)\,d\tau$$

ovvero, restringendo l'insieme di definizione ad $\mathbb{R}_0^+$

$$f(t)*g(t) := \int_0^{+\infty} f(t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau .$$

L'ultimo passaggio si può dimostrare nel seguente modo:

si consideri

$$(t-\tau) = \tau'$$

operando la sostituzione nella prima formula si ottiene la seconda tornando a chiamare τ' con il nome di τ.

La convoluzione soddisfa le seguenti proprietà:

- Commutativa $f*g = g*f$
- Associativa $f*(g*h) = (f*g)*h$
- Distributiva $f*(g+h) = (f*g)+(f*h)$
- Regola di differenziazione $D(f*g) = Df*g = f*Dg$

1.4 Teoremi dei rinnovi

Tra le varie proprietà asintotiche possedute dai processi dei rinnovi, vanno ricordate il primo teorema dei rinnovi (Feller 1941)

$$M(t) \sim \frac{t}{\mu} \qquad (t \to +\infty)$$

ed il secondo teorema dei rinnovi (Blackwell 1948)

$$M(t+h) - M(t) \sim \frac{h}{\mu} \qquad (t \to +\infty, \forall h>0)$$

quest'ultimo afferma che un processo ordinario dei rinnovi, tende (asintoticamente) ad avere la stessa proprietà di stazionarietà del processo di Poisson.

1.5 La trasformata (e l'antitrasformata) di Laplace

Spesso nel corso della tesi, ci troveremo ad utilizza la trasformata (e l'antitrasformata) di Laplace per la risoluzione di equazioni differenziali, pertanto si è ritenuto opportuno specificare il "modus operandi" di questo potente mezzo risolutivo.

La trasformata di Laplace è uno strumento estremamente versatile in quanto, oltre a risolvere equazioni differenziali, sia ordinarie che parziali, può dare risultati di grande interesse nei metodi asintotici, nelle differenze finite e nel calcolo degli integrali. Per questo la trasformata di Laplace è adoperata in matematica, fisica, meccanica, astronomia e nelle discipline tecniche, inoltre può essere applicato anche in molti problemi della Teoria del Rischio. La metodologia di applicazione è la seguente: una volta effettuata la trasformazione, che spesso consente di trovare la soluzione, occorre poi invertire l'operazione. Di qui la necessità di trovare l'inversa della trasformata di Laplace, il che vuol dire, calcolare l'antitrasformata.

La trasformata di Laplace di una funzione $y(t)$ (definita per tutti i numeri reali e localmente integrabili) è la funzione

$$Y(s) = \mathcal{L}\left[y(t)\right] = \int_{0^-}^{+\infty} e^{-st} y(t)\, dt$$

in cui

- $y(t)$ è una funzione del tempo nota per $t > 0$;
- s è una variabile complessa la cui parte reale è tale da rendere convergente l'integrale (condizione che definisce l'esistenza della $Y(s)$).

L'inversa (detta antitrasformata) è l'integrale di Bromwich

$$y(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{k-\infty}^{k+\infty} e^{st} Y(s)\, ds$$

dove l'integrazione è estesa ad un conveniente dominio del piano complesso.

Di particolare rilevanza risulta anche il seguente teorema:

Teorema di convoluzione. La trasformata di Laplace della convoluzione di due funzioni è il prodotto delle due trasformate, ovvero $\mathcal{L}(f * g)=\mathcal{L}(f)\cdot\mathcal{L}(g)$**.**

La trasformata di Laplace costituisce uno strumento estremamente potente e sistematico per la soluzione di equazioni differenziali ordinarie a coefficienti costanti: applicando infatti l'operatore $\mathcal{L}$ ad entrambi i membri dell'equazione differenziale (sia $y(t)$ la funzione incognita) , è possibile ricondurla ad una semplice equazione algebrica in $Y(s)$. Applicando poi l'operatore antitrasformata è possibile risalire alla funzione incognita $y(t)$.

Consideriamo ad esempio la seguente equazione differenziale ordinaria del secondo ordine a coefficienti costanti, con condizioni iniziali

$$(1)\qquad \begin{cases} y^{''}(t)+\alpha\cdot y^{'}(t)+\beta\cdot y(t)=f(t) \\ y^{'}(0)=a \\ y(0)=b \end{cases}$$

dove $y^{'}(0)$ e $y(0)$ rappresentano appunto le condizioni iniziali.

Applicando la trasformata di Laplace ad entrambi i membri, nelle ipotesi che tanto la $y(t)$ quanto la $f(t)$ siano trasformabili, otteniamo la seguente equazione algebrica di variabile $Y(s)$

$$s^2 \cdot Y(s) - s \cdot y(0) - y^{'}(0) + \alpha \cdot (s \cdot Y(s) - y(0)) + \beta \cdot Y(s) = F(s)$$

essendo $Y(s)$ la trasformata di $y(t)$ ed $F(s)$ la trasformata di $f(t)$.

Raccogliendo l'incognita

$$(s^2 + \alpha \cdot s + \beta) \cdot Y(s) = F(s) + (\alpha + s) \cdot b + a\ .$$

Pertanto la soluzione dell'equazione differenziale (1) si trova antitrasformando la seguente funzione

$$(2) \qquad y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s) + (\alpha + s) \cdot b + a}{s^2 + \alpha \cdot s + b}\right\},$$

un esempio numerico può essere ottenuto fissando $f(t) = 0$, $\alpha = -5$, $\beta = 6$, $y^{'}(0) = 1$ e $y(0) = 0$, in questo modo otteniamo

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 - 5s + 6}$$

ovvero

$$Y(s) = \frac{1}{s-3} - \frac{1}{s-2}$$

da cui, facendo l'inversa, troviamo

$$y(t) = e^{3t} - e^{2t}.$$

Come già detto, si definisce equazione integrale di Volterra, un'equazione della forma

$$(3) \qquad y(t) = f(t) + \int_0^t K(t,u) \cdot y(u) du$$

nell'incognita $y(t)$.

Se il nucleo $K(t,u)$ (che ricordiamo, è noto) risulta $K(t,u) = K(t-u)$, la (3) diventa

$$y(t) = f(t) + \int_0^t K(t-u) \cdot y(u) \cdot du$$

e l'equazione si dice di convoluzione.

Trasformando entrambi i membri secondo Laplace otteniamo, ricordando le proprietà della trasformata di Laplace, la seguente relazione

$$Y(s) = F(s) + K(s) \cdot Y(s)$$

da cui la soluzione per antitrasformazione è

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{F(s)}{1-K(s)} \right\}.$$

Se nell'equazione

$$y(t) = f(t) + \int_a^t K(t,u) \cdot y(u) du$$

oltre all'integrale, comparisse anche una derivata di ordine n della $y(t)$ parleremmo di equazione integro-differenziale.

Questo tipo di equazione può essere risolta in due modi distinti:

1. riconducendosi ad un'equazione integrale mediante integrazioni successive di entrambi i membri (ovviamente bisogna conoscere le condizioni iniziali) ed applicare poi la trasformata di Laplace ad entrambi i membri;
2. applicando direttamente la trasformata di Laplace ad entrambi i membri e ricordando che

$$\mathcal{L}\left\{y^{(n)}(t)\right\} = s^n Y(s) - s^{n-1} y(0) - s^{n-2} y^{'}(0) - \ldots - y^{n-1}(0) .$$

CAPITOLO 2

I PROCESSI DEI RINNOVI IN TEORIA DEL RISCHIO

2.1 Teoria Collettiva del Rischio

Al fine di una migliore comprensione del modello dei rinnovi in teoria del rischio, di seguito verrà esposta la teoria del rischio classica.

Ai primi del '900, l'attuario svedese Filip Lundberg, nell'ambito dello studio della probabilità di fallimento di una Compagnia di assicurazioni, prese in esame i rischi all'interno del portafoglio nel loro complesso, e non più singolarmente, introducendo in questo modo un nuovo concetto nella teoria matematica delle assicurazioni che successivamente prese il nome di Teoria Collettiva del Rischio.

In questo nuovo modello, il fondo di una Compagnia può rappresentarsi come

$$W(t) = u + ct - S(t) \qquad \left(t \in \mathbb{R}_0^+\right)$$

dove

- $u = W(0)$ (con $u \geq 0$) è il valore iniziale del fondo;

- c (con $c > 0$) è il flusso (continuo nel tempo) delle entrate;
- $S(t)$ esprime le perdite della Compagnia dovute ai sinistri.

Supponendo che in un intervallo di tempo $I_t =]0,t]$ avvengano $N(t)$ sinistri ed indicando con X_i la spesa relativa all'i-esimo sinistro, si ottiene

$$S(t) = X_1 + X_2 + ... + X_{N(t)}$$

da cui risulta che in $S(t)$ intervengono due fenomeni aleatori rappresentati dal numero dei sinistri $N(t)$, e dalla variabile aleatoria X_i.

Di norma, il processo stocastico $N(t)$ viene descritto da un processo di Poisson (Teoria del Rischio Classica), pertanto indicando con $p(k,t)$ la probabilità che nell'intervallo I_t avvengano k sinistri, si avrà

$$p(k,t) = p_k(\lambda t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \qquad (k = 0,1,2,...)$$

dove λ è il valor medio della variabile casuale p_k ed esprime il numero medio di incidenti attesi nell'unità di tempo. Scegliendo l'unità di tempo (tempo operativo) in modo che risulti $\lambda = 1$ si ha

$$p(k,t) = e^{-t} \frac{(t)^k}{k!} \qquad (k = 0,1,2,...).$$

Avendo ipotizzato per $N(t)$ un processo di Poisson, diremo che $S(t)$ segue un processo di Poisson composto.

Passando ora alle spese per ogni sinistro, detta X la generica variabile aleatoria X_i, si introduce la funzione di ripartizione

$$P(v) = \mathrm{Prob}(X \leq v) \qquad (v \geq 0)$$

da cui, se la funzione di ripartizione risulta derivabile, si ammette la densità

$$p(v) = P'(v).$$

Nella Teoria Collettiva del Rischio, si è soliti considerare la funzione

$$P(v) = 1 - e^{-v}$$

che consente notevoli semplificazioni.

La spesa media per incidente *m*, è data da

$$E(X) = \int_0^{+\infty} v dP(v) = m \,,$$

è possibile dimostrare che

$$E(S(t)) = \lambda t m$$

per cui occorre fissare il flusso delle entrate *c* in modo che

$$c > \lambda m$$

ossia

$$c = \lambda m(1 + \eta) \qquad (\eta > 0)$$

dove il parametro η prende il nome di coefficiente di sicurezza o di caricamento e risulta $0 \leq \eta \leq 1$.

2.2 La diseguaglianza di Lundberg

Consideriamo la funzione detta funzione asintotica di non rovina

$$f(u) = \text{Prob}\left(W(t) > 0\right) \qquad \left(\forall t \in \mathbb{R}_0^+\right)$$

la quale rappresenta la probabilità che il fondo di una Compagnia risulti positivo per ogni valore finito di t ed è espressa in termini del capitale iniziale u. Posto poi che il fondo risulti negativo in un insieme $A \subset R_0^+$ e detto $T = \inf A$ (dove T viene detto istante di rovina), introduciamo la funzione

$$\Psi(u) = \text{Prob}(T \text{ finito})$$

che prende il nome di funzione (asintotica) di rovina. Ovviamente si ha

$$f(u) + \Psi(u) = 1.$$

Tra i risultati connessi alla Teoria della Rovina, uno dei più notevoli è la diseguaglianza di Lundberg (che, però, è anche una relazione asintotica)

$$\Psi(u) \leq e^{-\mathrm{R}u}$$

dove R è la soluzione diversa da zero dell'equazione

$$\lambda + zc = \lambda \int_0^{+\infty} e^{zx} dP(x)$$

che, mediante un'integrazione per parti, può essere riscritta come

$$\frac{\lambda}{c} \int_0^{+\infty} e^{zx} g(x) dx = 1 \qquad \left(g(x) = 1 - P(x)\right).$$

Inoltre si può dimostrare che sussiste lo sviluppo asintotico

$$\Psi(u) \sim Ce^{-\mathrm{R}u} \qquad (u \to +\infty)$$

essendo

$$C = \frac{\eta m}{\mathrm{R} \int_0^{+\infty} x e^{\mathrm{R}x} g(x) dx}.$$

2.3 Processi dei rinnovi e teoria della rovina

A lungo, nella teoria della rovina, i tempi dei sinistri sono stati considerati distribuiti esclusivamente secondo un processo di Poisson, solo nel 1957, come riportato in precedenza, Erik Sparre Andersen introdusse la prima considerazione dei processi dei rinnovi in teoria della rovina. Egli, indicando con $Y_i \left(i \in \mathbb{N}\right)$ gli esborsi dell'Impresa conseguenti ai sinistri (indipendenti ed identicamente distribuiti, con funzione di ripartizione $P\left(y\right)$ definita per $y \geq 0$, ovvero nel caso di somme positive a rischio), e con $T_i \left(i \in \mathbb{N}\right)$ gli intervalli di tempo fra i sinistri (indipendenti ed identicamente distribuiti, con funzione di ripartizione $K\left(y\right)$ tale che $K\left(0\right)=0$), ipotizzò che le durate T_i seguissero un processo ordinario dei rinnovi.

Dunque il fondo a disposizione dell'Impresa si può scrivere come

$$W\left(e\right)=u+ct-\sum_{1}^{N(t)}{}_{i}Y_i$$

dove

- u è il valore iniziale del fondo;
- c è il flusso (continuo e costante nel tempo) delle entrate;
- $N\left(t\right)$ esprime il numero dei sinistri;

- $\sum_{1}^{N(t)} {}_i Y_i$ rappresenta la perdita.

Se poniamo

$$N(t) = \max\{n : S_n \le t\}$$

dove

$$S_n = T_1 + T_2 + \ldots + T_n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

si ottiene che

$$ct = c\sum_{1}^{N(t)} {}_i T_i$$

da cui

$$W(e) = u + \sum_{1}^{N(t)} {}_i (cT_i - Y_i) = u - \sum_{1}^{N(t)} {}_i X_i \qquad (X_i \in \mathbb{R})$$

avendo posto

$$X_i = Y_i - cT_i,$$

le variabili casuali X_i risultano inoltre essere indipendenti ed identicamente distribuite con funzione di ripartizione

$$H(x) = \text{Prob}(Y_i - cT_i \le x) = \int_0^{+\infty} P(x + ct)\,dK(t) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Le X_i rappresentano la differenza fra la perdita Y_i dovuta al sinistro avvenuto all'istante S_i e le entrate relative al periodo T_i compreso fra gli istanti S_{i-1} e S_i.

Inoltre, essendo

$$E(X_i) = E(Y_i) - cE(T_i) = m - c\mu$$

discende che tale differenza (che rappresenta la perdita in media) dovrà essere caricata in modo che il guadagno medio risulti positivo

$$c\mu - m > 0$$

ossia

$$c = \frac{m}{\mu}(1+\eta)$$

dove η è il coefficiente di sicurezza o caricamento e da quest'ultima formula si evince che

$$E(X_i) = -m\eta \, .$$

Dal teorema di Feller (primo teorema dei rinnovi)

$$E(N(t)) \sim \frac{t}{m} \qquad (t \to +\infty)$$

si ottiene

$$ct \sim E(N(t))E(Y_i)(1+\eta) \qquad (t \to +\infty)$$

con la conclusione che il termine ct tende asintoticamente al prodotto fra numero medio di sinistri in un intervallo di tempo $[0,t]$ e spesa media, più un opportuno caricamento.

Come nel caso classico, anche nell'evenienza dei rinnovi esiste uno sviluppo asintotico per la funzione asintotica di rovina $\left(\Psi(u)=1-f(u)\right)$

$$\Psi(u) \sim e^{-\mathrm{R}u} \qquad (u \to +\infty)$$

sempre che la funzione di ripartizione sia di tipo esponenziale. La costante R si ricava cercando la radice R positiva dell'equazione (in $\mathbb{R}$)

$$\int_0^{+\infty} e^{rz} dP(z) \int_0^{+\infty} e^{-crz} dK(z) = 1 .$$

CAPITOLO 3

PROBABILITÀ ASINTOTICA DI NON ROVINA

3.1 Premessa

Nel 1998 Dickson ha proposto una nuova equazione integro-differenziale per il calcolo della funzione asintotica di non rovina, nel caso in cui la sequenza stocastica dei sinistri fosse regolata da un processo ordinario dei rinnovi.

In questo capitolo, ipotizzando che il processo aleatorio dei sinistri sia regolato da una distribuzione di tipo Erlang di ordine 2, si cercherà di esplicitare la funzione di non rovina nel caso in cui la funzione di ripartizione delle somme a rischio sia del tipo esponenziale negativa.

3.2 L'equazione di Dickson

L'equazione integro-differenziale a cui perviene Dickson è

$$(1) \qquad c^2 f''(u) - 2\beta c f'(u) + \beta^2 f(u) = \beta^2 \int_0^u p(x) f(u-x)\,dx \qquad \left(u \in \mathbb{R}_0^+\right)$$

dove

- $f(u)$ è la probabilità (asintotica) di non andare in rovina con un capitale iniziale pari ad u;
- $c = \beta \frac{m}{2}(1+\eta)$ è il flusso delle entrate costanti e continue nel tempo;
- $p(x)$ è la densità delle somme a rischio;
- m è il valore medio della funzione di ripartizione delle somme a rischio $P(x)$;
- $0 < \eta < 1$ è il coefficiente di sicurezza;
- β è il parametro della distribuzione di Erlang.

All'equazione di Dickson vanno associate le condizioni iniziali

$$(a) \qquad \begin{cases} f(0) = f_0 \\ f'(0) = f'_0 \end{cases}$$

e la condizione di consistenza

$$(b) \qquad c^2 f''(0) - 2cf(0) + f(0) = 0$$

che si ottiene dall'equazione di Dickson ponendo $u = 0$.

In altri termini, la condizione di consistenza segue dall'equazione (1) ponendo $u = 0$ è, di conseguenza, anche una condizione di coerenza.

Inoltre, essendo la funzione $f(u)$ di natura probabilistica, si impone

$$\text{(c)} \qquad \begin{array}{l} 0 \le f(u) \le 1 \\ f'(u) > 0 \end{array}$$

e

$$\text{(d)} \qquad \lim_{u \to +\infty} f(u) = 1$$

quest'ultima condizione esprime la certezza di non fallimento con un capitale iniziale infinitamente grande, mentre la (c) assicura che $f(u)$ ha le caratteristica di una funzione di ripartizione.

L'equazione di Dickson si basa sulla circostanza di aver preso come densità della funzione di ripartizione relativa agli intervalli di tempo fra sinistri la funzione

$$k(t) = \beta^2 t e^{-\beta t}$$

e di fatto il parametro β entra nella scrittura dell'equazione di Dickson; però una semplice osservazione, consistente in un cambio di variabili, mostra che $f(u)$ non dipende da tale costante. Con questa osservazione nulla cambia ponendo $\beta = 1$ cosicché l'equazione (1) diventa

$$\text{(2)} \qquad c^2 f''(u) - 2cf'(u) + f(u) = \int_0^u p(x) f(u-x)\,dx$$

con $c=\frac{m}{2}(1+\eta)$.

3.2.1 Applicazioni della trasformata di Laplace all'equazione di Dickson nel caso in cui la funzione di ripartizione delle somme a rischio sia del tipo esponenziale negativa

Prendendo in esame il caso in cui $p(x)=e^{-x}$, deriviamo la (2) ottenendo

$$(3) \qquad c^2 f'''(u)-2cf''(u)+f'(u)=f(u)+\int_0^u p'(x)f(u-x)dx .$$

Sommando poi la (2) con la (3), dalla relazione

$$p'(x)+p(x)=0$$

la soluzione della (2) si riconduce alla soluzione di un'equazione differenziale

$$(4) \qquad c^2 f'''(u)+\left(c^2-2c\right)f''(u)+(1-2c)f'(u)=0$$

che, sostituendo a c la sua espressione, diventa

$$(1+\eta)^2 f'''(u)+(1+\eta)(\eta-3)f''(u)-4\eta f'(u)=0$$

con le condizioni (a), (b), (c) e (d), espresse in precedenza.

Tale equazione si integra immediatamente e si trova l'integrale generale

$$f(u) = k_0 + k_1 e^{\alpha_1 u} + k_2 e^{\alpha_2 u}$$

dove $\alpha_1 < 0$ e $\alpha_2 > 0$ sono le due radici reali dell'equazione caratteristica associata alla (4), pari a

$$\alpha_{1,2} = \frac{(3-\eta) \pm \sqrt{(3-\eta)^2 + 16\eta}}{2(1+\eta)}$$

Per determinare i valori dei coefficienti bisogna innanzitutto tener conto del fatto che $f(u)$ esprime una probabilità e si deve quindi imporre che risulti $k_2 = 0$ essendo $\alpha_2 > 0$. Dalla condizione, poi, $f(\infty) = 1$ segue $k_0 = 1$ e dunque

$$f(u) = 1 + k_1 e^{\alpha_1 u}$$

perciò viene

$$f(0) = 1 + k_1 = f_0$$

da cui discende che $-1 < k_1 < 0$, ovvero $-k_1 = 1 - f_0 = \Psi_0$, essendo Ψ_0 la probabilità di rovina con un capitale nullo. Ciò posto, per determinare k_1 si ricorre alla condizione di consistenza, notando anche che

$$f_0^{'} = f^{'}(0) = k_1 \alpha_1 = (f_0 - 1)\alpha_1$$

non può essere scelta ad arbitrio e dipende dal valore f_0.

Va quindi osservato che f_0 e $f_0^{'}$ si esprimono tramite k_1 e che perciò la conoscenza di questa costante risolve esaustivamente l'equazione di Dickson nel caso di distribuzione delle somme a rischio esponenziale negativa

$$k_1 = -\frac{8}{(1+\eta)\left[\eta + 5 + \sqrt{(3-\eta)^2 + 16\eta}\right]}$$

Ne segue

$$(5) \quad f_0 = 1 + k_1 = \frac{\eta}{1+\eta} \frac{\eta^2 + 6\eta - 3 + (1+\eta)\sqrt{(3-\eta)^2 + 16\eta}}{\eta\left[\eta + 5 + \sqrt{(3-\eta)^2 + 16\eta}\right]} = \frac{\eta}{1+\eta} \mathrm{H}(\eta)$$

che verificandosi $\mathrm{H}(\eta) > 1$, è maggiore di $\frac{\eta}{1+\eta}$ che è la probabilità di non andare in rovina con un capitale nullo, nell'ipotesi di distribuzione delle somme a rischio di tipo esponenziale negativo, nel caso classico (Poissoniano).

È possibile studiare l'equazione di Dickson anche tramite l'utilizzo della trasformata di Laplace della (3). Si trova come trasformata di Laplace $\varphi(s)$ trasformata di $f(u)$

$$\varphi(s) = \frac{1}{s} \frac{c^2 s f_0 - m\eta}{c^2 s - 2c + \gamma(s)}$$

con

$$\gamma(s) = \mathcal{L}\left(1 - P(x)\right)$$

ed è fondamentale osservazione del Dickson che se il numeratore si annulla per $s = s_0$ anche il denominatore deve annullarsi nello stesso punto. Nel caso in esame risulta

$$\varphi(s) = \frac{1}{s} \frac{c^2 s f_0 - \eta}{c^2 s - 2c + \dfrac{1}{s+1}}$$

e si vede che il denominatore si annulla per

$$c^2 s^2 + \left(c^2 - 2c\right) s + 1 - 2c = 0 \, .$$

Facendo uso di questo risultato si trova

$$(6) \qquad f_0 = \frac{\eta}{1+\eta} \frac{4}{(1+\eta) s_0} = \frac{\eta}{1+\eta} \frac{8}{3 - \eta + \sqrt{(3-\eta)^2 + 16\eta}}$$

e le due espressioni (5) e (6) coincidono, in quanto un calcolo lungo mostra che la differenza fra i due valori è nulla.

Il modulo della radice negativa $|s_1| = |\alpha_1| = r$ deve assumersi come una costante che gioca lo stesso ruolo della costante di Lundberg*. In letteratura, essa è indicata spesso come costante di Sparre-Andersen.

* Ciò vale per il caso esponenziale, mentre se la funzione di ripartizione delle somme a rischio fosse di tipo subesponenziale non vi sarebbe più alcuna costante di Lundberg.

Difatti, è noto nel processo dei rinnovi applicato alla Teoria della Rovina, che, nel caso di somme a rischio distribuite secondo un'esponenziale negativa, esiste una costante soluzione dell'equazione

$$\int_0^{+\infty} e^{rx}\,dP(x)\int_0^{+\infty} e^{-crt}k(t)\,dt=1$$

che nel caso in esame diventa

$$\int_0^{+\infty} e^{-(1-r)x}\,dP(x)\int_0^{+\infty} te^{-(cr+1)t}k(t)\,dt=1$$

ovvero

$$r\left[c^2r^2-\left(c^2-2c\right)r-\left(2c-1\right)\right]=0$$

la cui sola radice positiva è

$$r=-\frac{3-\eta-\sqrt{\left(3-\eta\right)^2+16\eta}}{2\left(1+\eta\right)}=\left|\alpha_1\right|=\left|s_1\right|.$$

CAPITOLO 4

TALUNE VALUTAZIONI NUMERICHE

4.1 Approssimazioni della disuguaglianza di Lundberg

Con riferimento alla diseguaglianza di Lundberg (caso classico)

$$\Psi(u) \leq e^{-\mathrm{R}u}$$

trattata in precedenza, procederemo ora al calcolo di alcune approssimazioni della stessa. Partendo dall'equazione

$$\lambda + zc = \lambda \int_0^{+\infty} e^{zx} dP(x)$$

andremo a sostituire a $P(x)$ opportune equazioni in modo tale da valutare numericamente il risultato ottenuto.

Successivamente effettueremo lo stesso procedimento con riferimento allo sviluppo asintotico

$$\Psi(u) \sim Ce^{-\mathrm{R}u} \qquad (u \to +\infty)$$

trovando così una migliore approssimazione.

4.1.1 Somme a rischio di tipo esponenziale negativa

Esamineremo ora il caso in cui le somme a rischio siano del tipo

$$\left\{ p(x) = dP(x) = e^{-x} \right\}$$

Per $\lambda = 1$, ricordando che

$$m = E(x) = \int_0^{+\infty} x d\left(1 - e^{-x}\right)$$

ovvero, integrando per parti

$$\int x d\left(1 - e^{-x}\right) = x e^{-x} - \int \left(1 - e^{-x}\right) dx = x e^{-x} - e^{-x} + c$$

$$\int_0^{+\infty} x d\left(1 - e^{-x}\right) = \left[x e^{-x} - e^{-x} \right]_0^{+\infty} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x} \right) - (-1) = 1 \qquad [m = 1]$$

la

$$\lambda + zc = \lambda \int_0^{+\infty} e^{zx} dP(x)$$

diventa

$$1 + zc = \int_0^{+\infty} e^{zx} dP(x) .$$

Ipotizzando

$$dP(x) = d\left(1 - e^{-x}\right) = e^{-x}$$

e sostituendo opportunamente, otteniamo

$$1+zc=\int_0^{+\infty} e^{zx}d\left(1-e^{-x}\right)=\int_0^{+\infty} e^{zx}e^{-x}dx=\int_0^{+\infty} e^{x(z-1)}dx=$$
$$=\frac{1}{z-1}\int_0^{+\infty}(z-1)e^{x(z-1)}dx=\frac{1}{z-1}\left[e^{x(z-1)}\right]_0^{+\infty}=\frac{1}{1-z}$$

dunque

$$1+zc=\frac{1}{1-z}$$

da cui, risolvendo per z e scartando la soluzione banale $z=0$, segue

$$\mathrm{R}=1-\frac{1}{c}$$

infine, ricordando che $c=\lambda m(1+\eta)$, avendo posto $\lambda=1$ e $m=1$, variando il valore di η otteniamo

η	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	1
R	0,090909	0,166667	0,230769	0,285714	0,333333	0,5

Con riferimento a

$$\Psi(u)\sim Ce^{-\mathrm{R}u} \qquad (u\to+\infty)$$

possiamo calcolare

$$C=\frac{\eta m}{\mathrm{R}\int_0^{+\infty} xe^{\mathrm{R}x}g(x)dx}=\frac{\eta m}{\mathrm{R}\int_0^{+\infty} xe^{(R-1)x}dx} \qquad \left[g(x)=1-P(x)=1-\left(1-e^{-x}\right)=e^{-x}\right]$$

dove, ricordando che $\mathrm{R}<1$, risulta

$$\int_0^{+\infty} xe^{(R-1)x}dx = \int_0^{+\infty} xd\,\frac{e^{(R-1)x}}{R-1} = \left[\frac{xe^{(R-1)x}}{R-1}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\frac{e^{(R-1)x}}{R-1}dx =$$

$$= 0 - \left[\frac{e^{(R-1)x}}{(R-1)^2}\right]_0^{+\infty} = -\left(0 - \frac{1}{(R-1)^2}\right) = \frac{1}{(R-1)^2}$$

ovvero, per $\eta = 0{,}1$

$$C = \frac{\eta m}{\mathrm{R}\int_0^{+\infty} xe^{(R-1)x}dx} \cong 0.909091$$

quindi

u	$\Psi(u) \le e^{-\mathrm{R}u}$	$\Psi(u) \sim Ce^{-\mathrm{R}u}$
1	*0,91310072*	*0,83009156*
5	*0,63473642*	*0,57703311*
10	*0,40289032*	*0,36626393*
20	*0,16232061*	*0,14756419*
40	*0,02634798*	*0,02395271*
60	*0,00427682*	*0,00388802*
80	*0,00069422*	*0,00063111*
100	*0,00011269*	*0,00010244*

4.1.2 Somme a rischio di tipo Erlang (2)

Esamineremo ora il caso in cui le somme a rischio siano del tipo

$$\left\{ p(x) = dP(x) = xe^{-x} \vee x \geq 0 \right\}$$

Ponendo

$$dP(x) = xe^{-x}$$

e sostituendo opportunamente, otteniamo

$$\lambda + zc = \lambda \int_0^{+\infty} e^{zx} d\left(1 - \left(xe^{-x} + e^{-x}\right)\right)$$

ricordando che

$$m = \int_0^{+\infty} \left(xe^{-x} + e^{-x}\right) dx = 2$$

l'equazione

$$\lambda + zc = \lambda \int_0^{+\infty} e^{zx} dP(x)$$

che, ponendo $\lambda = 1$, diventa

$$1 + zc = \int_0^{+\infty} e^{zx} d\left(1 - xe^{-x} - e^{-x}\right) = \int_0^{+\infty} e^{zx} xe^{-x} dx =$$

$$= \int_0^{+\infty} xe^{(z-1)x} dx = \frac{1}{z-1} \int_0^{+\infty} (z-1) xe^{(z-1)x} dx$$

da cui, integrando per parti, si ottiene

$$\frac{1}{z-1}\left(0 - \frac{1}{z-1}\int_0^{+\infty} (z-1) e^{(z-1)x} dx\right) = \frac{1}{z-1}\left(-\frac{1}{z-1}\left[e^{(z-1)x}\right]_0^{+\infty}\right) = \frac{1}{(z-1)^2}$$

dunque

$$1 + zc = \frac{1}{(z-1)^2}$$

ora, risolvendo per z, scartando la soluzione banale $z=0$ e scartando la radice $z=\frac{(2c-1)+\sqrt{4c+1}}{2c}$ in quanto deve risultare sempre $\mathrm{R}<1$, segue

$$\mathrm{R}=\frac{(2c-1)-\sqrt{4c+1}}{2c}$$

infine, ricordando che $c=\lambda m(1+\eta)$, avendo posto $\lambda=1$ e $m=1$, variando il valore di η otteniamo

η	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	1
R	0,061251	0,113382	0,158387	0,197705	0,232408	0,359612

inoltre, con riferimento a

$$\Psi(u)\sim Ce^{-\mathrm{R}u} \qquad (u\to+\infty)$$

possiamo calcolare

$$C=\frac{\eta m}{\mathrm{R}\int_0^{+\infty} xe^{\mathrm{R}x}g(x)\,dx}=\frac{\eta m}{\mathrm{R}\int_0^{+\infty}\left(x^2e^{(R-1)x}+xe^{(R-1)x}\right)dx} \qquad \left[g(x)=1-P(x)=xe^{-x}+e^{-x}\right]$$

dove, ricordando che $\mathrm{R}<1$ e integrando risulta

$$\int_0^{+\infty}\left(x^2e^{(R-1)x}+xe^{(R-1)x}\right)dx=\left[e^{(R-1)x}\left(\frac{x^2}{R-1}+\frac{(R-3)x}{(R-1)^2}-\frac{R-3}{(R-1)^3}\right)\right]_0^{+\infty}=\frac{R-3}{(R-1)^3}$$

ovvero, per $\eta=0,1$

$$C = \frac{\eta m}{\mathrm{R}\int_{0}^{+\infty}\left(x^2 e^{(R-1)x} + x e^{(R-1)x}\right)dx} \cong 0{,}975157$$

quindi

u	$\Psi(u) \leq e^{-\mathrm{R}u}$	$\Psi(u) \sim Ce^{-\mathrm{R}u}$
1	*0,940587*	*0,920983*
5	*0,736199*	*0,720854*
10	*0,541988*	*0,530692*
20	*0,293751*	*0,287629*
40	*0,086290*	*0,084491*
60	*0,025348*	*0,024819*
80	*0,007446*	*0,007291*
100	*0,002187*	*0,002142*

4.2 Approssimazioni dell'equazione di Dickson

In questo paragrafo procederemo a dare forma esplicita alla funzione di non rovina $f(u)$, soluzione dell'equazione di Dickson, nel caso in cui gli intervalli di tempo seguano una distribuzione di tipo Erlang di ordine 2, e le somme a rischio siano di tipo esponenziale negativa.

4.2.1 Somme a rischio di tipo esponenziale negativa

Con riferimento alla soluzione dell'equazione di Dickson, prendendo in esame il caso in cui le somme a rischio siano di tipo esponenziale negativa $p(x)=e^{-x}$, siamo giunti all'integrale generale

$$f(u)=k_0+k_1e^{\alpha_1 u}+k_2e^{\alpha_2 u}$$

ricordando che $\alpha_1<0$ e $\alpha_2>0$ sono le due radici reali dell'equazione caratteristica associata a $c^2 f'''(u)+\left(c^2-2c\right)f''(u)+(1-2c)f'(u)=0$, ovvero

$$\alpha_{1,2}=\frac{(3-\eta)\pm\sqrt{(3-\eta)^2+16\eta}}{2(1+\eta)}$$

otteniamo, al variare del valore di η, i seguenti valori

η	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	1
α_1	-0,119936	-0,217771	-0,298871	-0,367026	-0,424972	-0,618034
α_2	2,756299	2,551104	2,375795	2,224168	2,091639	2,618034

Inoltre, tenendo conto del fatto che $f(u)$ esprime una probabilità e si deve quindi imporre che risulti $k_2 = 0$ essendo $\alpha_2 > 0$, ed essendo $f(\infty) = 1$, segue $k_0 = 1$, si giunge a

$$f(u) = 1 + k_1 e^{\alpha_1 u}$$

dove

$$k_1 = -\frac{8}{(1+\eta)\left[\eta + 5 + \sqrt{(3-\eta)^2 + 16\eta}\right]}$$

ovvero

η	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	1
k_1	-0,880064	-0,782229	-0,701128	-0,632974	-0,575028	-0,381966

Calcoliamo ora la funzione di non rovina $f(u)$ per $\eta = 0,1$

u	$f(u) = 1 + k_1 e^{\alpha_1 u}$
1	*0,219403*
5	*0,516855*
10	*0,734759*
20	*0,920060*
40	*0,992739*
60	*0,999340*
80	*0,999940*
100	*0,999995*

4.3 La costante di Sparre-Andersen

Con riferimento alla costante di Sparre-Andersen

$$\int_0^{+\infty} e^{rz} dP(z) \int_0^{+\infty} e^{-crz} dK(z) = 1$$

procederemo ora ad una sua approssimazione, considerando il caso in cui gli intervalli di tempo seguano un processo di tipo Erlang (2), mentre le somme a rischio siano di tipo esponenziale negativa.

Essendo le somme a rischio di tipo esponenziale $p(z) = dP(z) = e^{-z}$, mentre gli intervalli di tempo sono di tipo Erlang(2) $k(z) = dK(z) = ze^{-z}$, otteniamo

$$\int_0^{+\infty} e^{rz} \cdot e^{-z} dz \cdot \int_0^{+\infty} e^{-crz} \cdot ze^{-z} dz = 1$$

che diventa

$$\int_0^{+\infty} e^{-(1-r)z} dz \int_0^{+\infty} ze^{-(cr+1)z} dz = 1$$

$$\left[\frac{e^{(r-1)z}}{r-1} \right]_0^{+\infty} \cdot \left[-\frac{e^{-(cr+1)z} (crz + z + 1)}{(cr+1)^2} \right]_0^{+\infty} = 1$$

da cui

$$-\frac{1}{r-1} \frac{1}{(cr+1)^2} = 1$$

$$-\frac{1}{(r-1)(cr+1)^2}=1$$

$$-1+\frac{1}{(1-r)(cr+1)^2}=0$$

e quindi, ricordando che $c=\beta\frac{m}{2}(1+\eta)$, dove $\beta=1$ e $m=1$, otteniamo che l'unica radice positiva, escludendo quella banale $r=0$, è

$$r=\frac{-\eta^2-\sqrt{(1+\eta)^3}\sqrt{n+5}+1}{2\left(-1-2\eta-\eta^2\right)}$$

e, al variare di η, abbiamo

η	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	1
R	0,667520	0,707500	0,740339	0,767695	0,790760	0,866025

Ora abbiamo tutti gli elementi per valutare cosa accade alla limitazione superiore della funzione di non rovina $f(u)$, ovvero $f(u)\le 1-e^{-\mathrm{R}u}$, al variare del fondo u per $\eta=0,1$

u	$f(u)\le 1-e^{-\mathrm{R}u}$
1	*0,487021*
5	*0,964478*
10	*0,998738*
20	*0,999998*
25	*0,999999*

CONCLUSIONI

Gli argomenti trattati mostrano come, volendo una maggiore fedeltà al fenomeno osservato, se ne debba pagare il prezzo con strumenti matematici sempre più raffinati e quindi difficoltosi.

In altri termini, un modello semplice (naturalmente il semplice va riferito agli sviluppi di Sparre-Andersen) come il modello di Poisson e la teoria classica del rischio, ha lo svantaggio di non essere molto aderente alla realtà, ma le valutazioni analitiche numeriche sono più semplici ed immediate.

Il modello di Sparre-Andersen, invece, certamente può dare un'immagine più vicina alla realtà, ma questa maggiore precisione si paga, come già detto, con procedimenti analitici e strumenti numerici più complessi.

Bisogna osservare tuttavia, che il procedimento più complesso non sempre è preferibile al più semplice, toccherà quindi all'attuario, dall'esame dei dati, scegliere quale procedimento tocca adoperare.

BIBLIOGRAFIA

E. Badolati, *"Introduzione alla Teoria della Rovina"*, Atti della giornata di Studio su "Il rischio nelle attività delle imprese finanziarie e Assicurative", Università degli Studi del Molise, Campobasso, 1993.

E. Badolati, *"Sul caso del caricamento nullo"*, collana SEGES, Università degli studi del Molise, Campobasso, 1993.

E. Badolati, "*L'Equazione di Cramér"*, Atti del convegno su "La teoria del rischio: ricerca e didattica", Università degli studi del Molise, Campobasso, 1996.

E. Badolati, *"I processi dei rinnovi in Teoria del Rischio"*, Atti della giornata di studio su "Nuovi indirizzi scientifici e didattici nella teoria del rischio", Università degli studi del Molise, Campobasso, 1999.

E. Badolati, M. Pietroluongo, *"Una serie convolutoria per l'equazione di Dickson"*, Atti del 23° Convegno AMASES, Rende, 1999.

A. Campana, A. Carleo, M. Pietroluongo, *"Ruin probability approximation for a class of renewal processes with heavy tails",* Dipartimento di Scienze Economiche, Gestionali e Sociali, Università degli Studi del Molise, Campobasso, 1999.

A. Carleo, *"Un confronto tra due funzioni di non rovina relative a due diversi processi stocastici dei sinistri",* Atti del 23° Convegno AMASES, Rende, 1999.

A. Carleo, *"Sulla probabilità di non rovina per un processo dei rinnovi Erlang (3)",* Atti della giornata di studi su "Nuovi indirizzi scientifici e didattici nella teoria del rischio", Università degli Studi del Molise, Campobasso, 1999.

D.C.M. Dickson, *"Insurance risk and ruin"*, Cambridge University Press, 1998.

D.C.M. Dickson, *"On a Class of Renewal Risk Processes"*, North American Actuarial Journal, 1998.

D.C.M. Dickson, C. Hipp, *"Ruin Probabilities for Erlang Risk Processes"*, Insurance: Mathematics and Economics, 1998.

E. Sparre Andersen, *"On the Collective Theory of Risk in the Case of Contagion between the Claims", vol. 2*, Transactions XV International Congress of Actuaries, 1957.

M.R. Spiegel, "*Trasformate di Laplace*", McGraw-Hill, 1994.